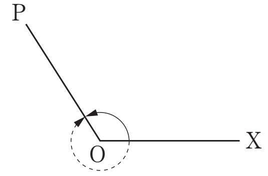
第8講　三角関数とその性質

§1　動径と一般角

要点整理 と 公式

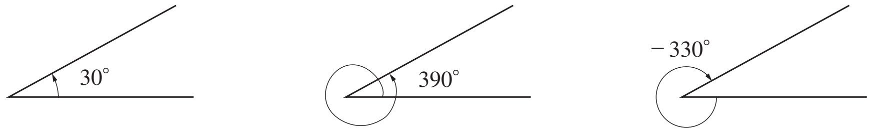
要点1 動径と一般角



右の図のような半直線 OX，OP を考える。
半直線 OP が点 O を中心とし，OX の位置から回転したものと考えるとき，この半直線 OP を「動径」といい，動径の始めの位置を表す半直線 OX を「始線」という。

動径の回転には，2 つの向きがある。
反時計回りを「　　の向き」といい，この向きの角を「　　の角」という。
時計回りを「　　の向き」といい，この向きの角を「　　の角」という。
負の角は，マイナスの符号をつけて表す。

また，回転の大きさについては 1 回転以上，つまり 360° 以上の場合も考える。
このように，回転の向きと大きさで表す角を「一般角」という。



上の図は，すべて同じ位置を表す動径である。つまり，動径の表し方は 1 通りではない。
一般に，動径 OP の表す 1 つの角を α とすると，動径 OP の表す角 θ は

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n \qquad (n \text{ は整数})$$

と表される。
上の図において　$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$　　，$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times$　　　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の角の動径 OP を座標平面上に図示せよ。また，60° の動径と同じ位置にあるものはどれか。

(1)　225°　　(2)　420°

(3)　−60°　　(4)　870°

Point Pickup

動径の図示

⟹　回転の向きと，その向きにおける回転数を考える。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 弧度法

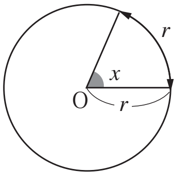
要点整理 と 公式

要点❷ 弧度法

角の大きさを表すのに，これまでは「度(°)」を単位とする「度数法」というのを用いてきた。ここでは別の表し方について学んでいく。

半径 r の円において，この半径と同じ長さ r の弧に対する中心角の大きさを $x°$ とすると，

$2\pi r \times \dfrac{x}{360} = r$ より $x = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ である。



この結果は半径 r によらず一定である。

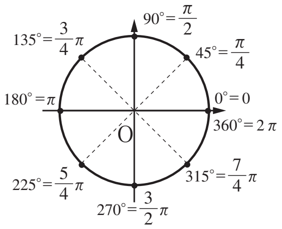
この x の大きさを「1　　　　」(1弧度)という。

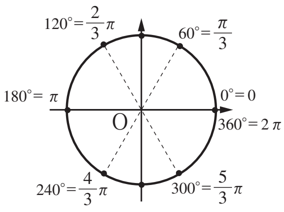
つまり，1ラジアン＝　　　　である。1ラジアンはおよそ 57.3° である。

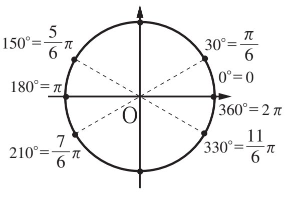
また，π ラジアン＝180°　であり，$1° = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアンである。

ラジアンを単位とする角の表し方を「弧度法」という。弧度法では，普通，ラジアンを省略して表す。

つまり，　π ＝180°　であり，$1° = \dfrac{\pi}{180}$　である。







©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

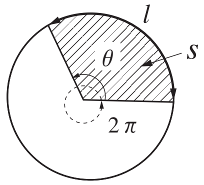
要点3 扇形の弧の長さと面積

半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 である。

その一部である半径 r，中心角 θ の扇形について，

弧の長さ l，面積 S はその中心角に比例するから

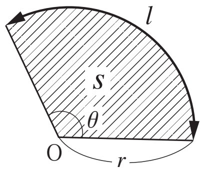
$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta, \qquad S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$



扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} lr$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］次の角を弧度法で表せ。

（1）30°　（2）495°　（3）-120°

［2］次の角を度数法で表せ。

（1）$\dfrac{5}{12}\pi$　（2）$-\dfrac{2}{3}\pi$　（3）$\dfrac{3}{2}\pi$

［3］半径 6 cm，中心角 $\dfrac{3}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

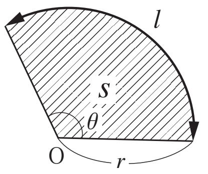
Point Pickup

弧度法と度数法

弧度法 → 度数法　$\pi = 180^\circ$

度数法 → 弧度法　$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$　$x^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times x$

扇形の弧の長さと面積



半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 三角関数

要点整理 と 公式

要点４ 三角関数

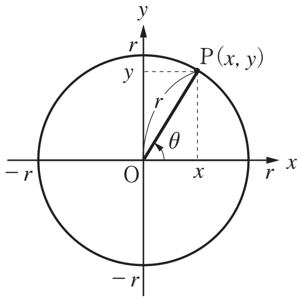
ここでは数学Ⅰで学んだ三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を，θ が一般角の場合において定義する。

以下，角度は弧度法で表す。

右図のように，原点中心，半径 r の円において，

x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の「動径」と，

円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，



比 $\dfrac{y}{r}$，$\dfrac{x}{r}$，$\dfrac{y}{x}$ 　の値

は，円 O の半径 r に関係なく，角 θ だけによって定まる。

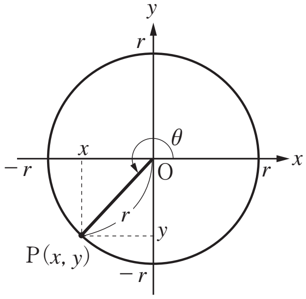
このことより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を「θ の　　　」として以下のように定義する。

■ 三角関数

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ一般角 θ の「　　　」「　　　」「　　　」といい，

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，一般角 θ の「　　　」という。

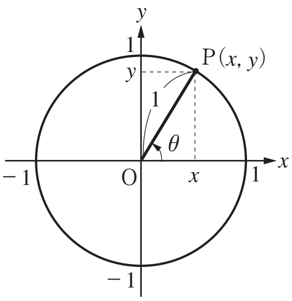
※ $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ 　(n は整数)に関しては，$\tan\theta$ は定義しない。

要点５ 三角関数と単位円

右図のように「単位円」(原点中心，半径１の円)において，

x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の「動径」と，

円との交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると



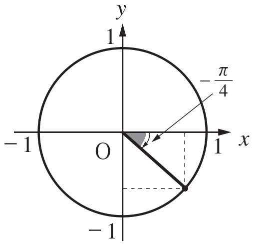
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

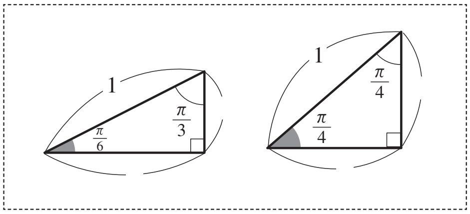
$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y,\quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

つまり，$\sin\theta$ の値は点 P の「　　座標」，$\cos\theta$ の値は点 P の「　　座標」と一致する。

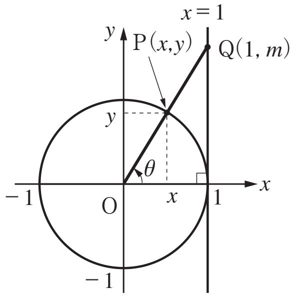
また，$-1 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であることがわかる。

（ex）$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ の値を単位円で考える。





$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \qquad ,\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$



右図の単位円において，x 軸の正の部分を始線とする。

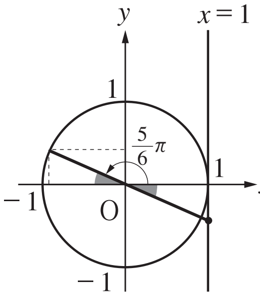
一般角 θ の動径と，直線「$x = 1$」との交点をQ(1，m)とすると，

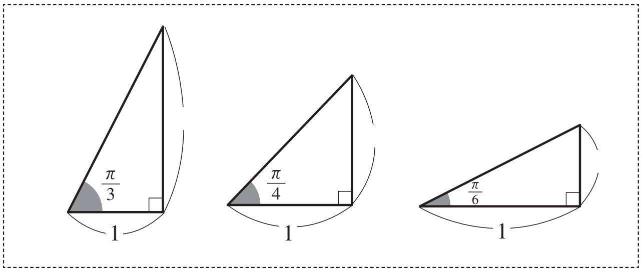
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

つまり，$\tan\theta$ の値は点 Q の y 座標と一致する。

点 Q は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動くので, $\tan\theta$ の値の範囲は「すべての実数」である。

（ex）$\tan\frac{5}{6}\pi$　の値を単位円で考える。





$$\tan\frac{5}{6}\pi =$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

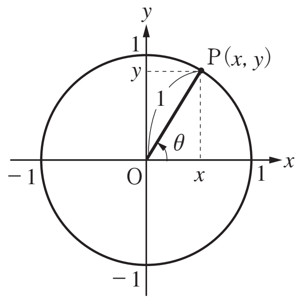
3

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{11}{6}\pi$　　(3)　$\theta = -\dfrac{7}{4}\pi$　　(4)　$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

Point Pickup

単位円を用いた三角関数の値（$\sin\theta$，$\cos\theta$）



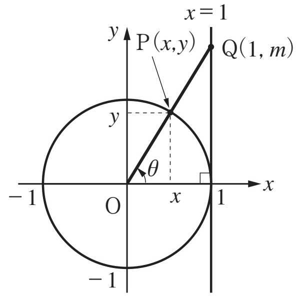
単位円の円周上の点の座標をP$(x,\ y)$とすると

$\sin\theta$ ＝　　，$\cos\theta$ ＝

P の座標で出てくる 3 つの値　　　，　　　，　　　が

どのような角度の$\sin\theta$，$\cos\theta$ のときに出てくるのかを覚えておくとよい。

単位円を用いた三角関数の値（$\tan\theta$）



単位円の円周上の点を点 P$(x,\ y)$，直線 OP と

直線 $x = 1$ の交点の座標を Q $(1,\ m)$とすると

$\tan\ \theta$ ＝

Q の y 座標で出てくる 3 つの値　　　，　　　，　　　が

どのような角度の $\tan\theta$ のときに出てくるのかを覚えておくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

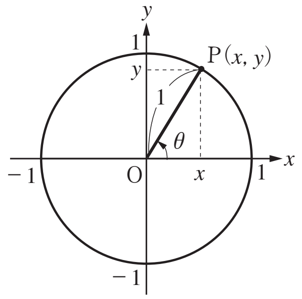
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 三角関数の相互関係，三角関数の性質

要点整理 と 公式

要点6 三角関数の相互関係



単位円の円周上の点 P $(x,\ y)$について，

$\cos\theta = x,\ \sin\theta = y$ …①

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ …②　　である。

②の $x,\ y$ に①を代入して，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ が成り立つ。

また，点 P $(x,\ y)$は単位円上にあるので，$x^2 + y^2 = 1$ …③

③の $x,\ y$ に①を代入して，　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$　が成り立つ。

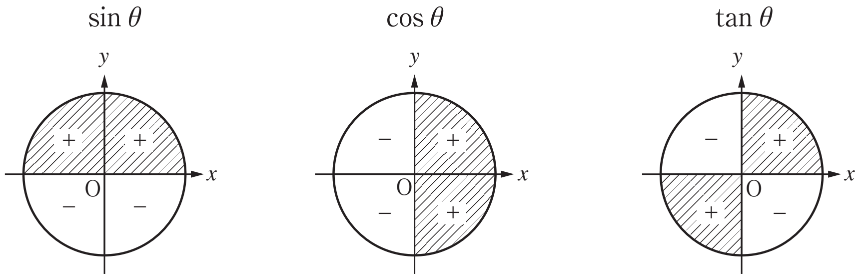
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ から，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が成り立つ。

よって，以下のことが成り立つ。

■ 三角関数の相互関係

① $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　③ $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の符号は，θ の動径がどの象限にあるかで決定する。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点7 三角関数の性質

三角関数の性質より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき以下が成り立つ。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\quad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

n を整数とするとき，角 $\theta + 2\pi \times n$ の動径は角 θ の動径と一致する。

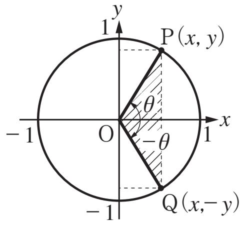
よって，次のことが成り立つ。

■ $\theta + 2n\pi$ の三角関数

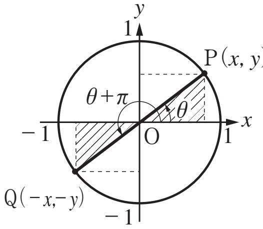
$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$　$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$　$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$

また，下図①，②，③より，次のことが成り立つ。

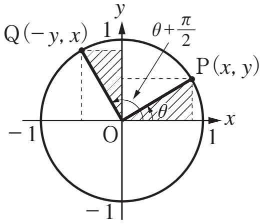
①



②



③



■ $-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の三角関数

① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

② $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$，$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$，$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$

③ $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$，$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$，$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\tan\theta}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　θ が第4象限の角で，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第3象限の角で，$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

三角関数の相互関係

①　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　②　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　③　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ の動径がどの「象限」にあるかで，三角関数の符号が決定する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1　次の①～④の角のうち，30° の動径と同じ位置にあるものは［ア］である。

①　150°　　②　−30°　　③　750°　　④　380°

2　(1)　120° の角を弧度法で表すと $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

また，$\dfrac{5}{4}\pi$ を度数法で表すと［エオカ］°である。

(2)　半径 3 ㎝，中心角 $\dfrac{4}{9}\pi$ の扇形の弧の長さは $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ ㎝，面積は［ケ］π ㎠である。

3　次の［　　］にあてはまるものを，下の①～⑥からそれぞれ選べ。

(1)　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき　$\sin\theta = \boxed{コ}$，$\cos\theta = \boxed{サ}$

①　$\dfrac{1}{2}$　②　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　③　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　④　$-\dfrac{1}{2}$　⑤　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑥　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\tan\theta = \boxed{シ}$

①　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　②　1　③　$\sqrt{3}$　④　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑤　-1　⑥　$-\sqrt{3}$

4　θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，$\tan\theta = -\dfrac{\boxed{ソ}}{\sqrt{\boxed{タ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

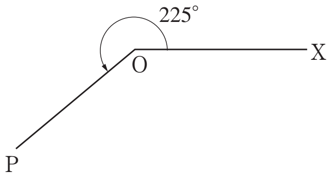
{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

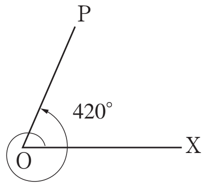
第8講　三角関数とその性質

1

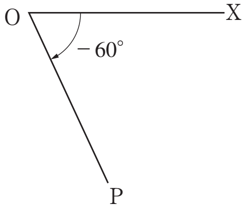
(1)



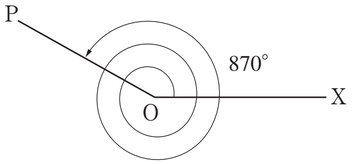
(2)



(3)



(4)



60° の動径と同じ位置にあるものは(2)。

2

［1］（1）$30^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times 30 = \dfrac{\pi}{6}$　（2）$495^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times 495 = \dfrac{11}{4}\pi$

（3）$-120^\circ = -\dfrac{\pi}{180} \times 120 = -\dfrac{2}{3}\pi$

［2］（1）$\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ$　（2）$-\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{2}{3} \times 180^\circ = -120^\circ$

（3）$\dfrac{3}{2}\pi = \dfrac{3}{2} \times 180^\circ = 270^\circ$

［3］$l = 6 \times \dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{18}{5}\pi$ (cm)，　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{54}{5}\pi$ (cm²)

3

（1）$\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$

（2）$\sin\dfrac{11}{6}\pi = -\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\dfrac{11}{6}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

（3）$\sin\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = 1$

（4）$\sin\dfrac{3}{2}\pi = -1$，$\cos\dfrac{3}{2}\pi = 0$，$\tan\dfrac{3}{2}\pi$ の値はない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

θ が第4象限の角より，$\sin\theta < 0$　　よって $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$

(2) $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + 3^2 = 10$

よって，$\cos^2\theta = \frac{1}{10}$

θ が第3象限の角より，$\cos\theta < 0$

よって，$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1 次の①～④の角のうち，30° の動径と同じ位置にあるものは [ア] である。

① 150°　② −30°　③ 750°　④ 380°

2 (1) 120° の角を弧度法で表すと $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

また，$\dfrac{5}{4}\pi$ を度数法で表すと [エオカ]° である。

(2) 半径 3 cm，中心角 $\dfrac{4}{9}\pi$ の扇形の弧の長さは $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ cm，面積は [ケ] π cm² である。

3 次の [　　] にあてはまるものを，下の①～⑥からそれぞれ選べ。

(1) $\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき　$\sin\theta = \boxed{コ}$，$\cos\theta = \boxed{サ}$

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　④ $-\dfrac{1}{2}$　⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\tan\theta = \boxed{シ}$

① $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　② 1　③ $\sqrt{3}$　④ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ −1　⑥ $-\sqrt{3}$

4 θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，$\tan\theta = -\dfrac{\boxed{ソ}}{\sqrt{\boxed{タ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1　ア　③

2　(1)　イ　2　　ウ　3　　エ　2　　オ　2　　カ　5

　　(2)　キ　4　　ク　3　　ケ　2

3　(1)　コ　④　　サ　⑥　　(2)　シ　⑤

4　ス　3　　セ　4　　ソ　3　　タ　7

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。